PART3 複素数の積の図形的な意味

要点整理と公式

要点 ① 複素数の積の図形的な意味

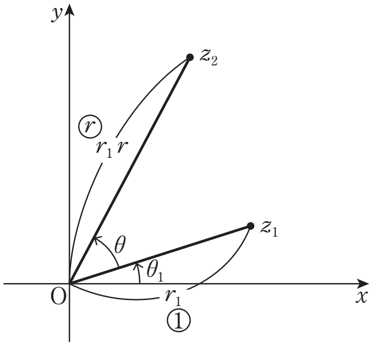
0 でない 2 つの複素数 z_1，α を，それぞれ

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\quad \alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とし，これらの積を z_2 とすると

$$z_2 = z_1\alpha = \qquad \{\cos(\qquad) + i\sin(\qquad)\}$$

である。この点 z_2 は，点 z_1 を原点を中心に θ だけ回転し，さらに原点からの距離を r 倍した点である。



複素数の積と回転

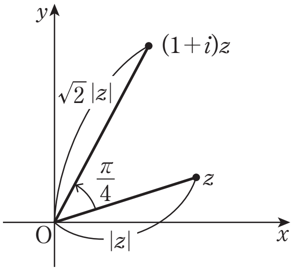
複素数 z と $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ について，点 $r(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot z$ は，点 z を原点を中心として θ だけ回転し，原点からの距離を r 倍した点である。

(ex) 点 $(1+i)z$ について

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，点 $(1+i)z$ は，点 z を原点を中心に

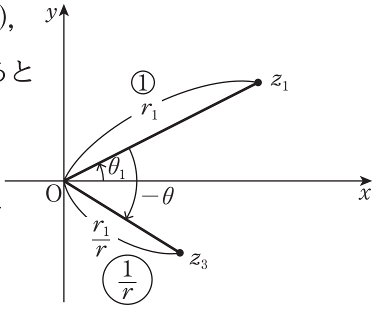
だけ回転し，原点からの距離を　　倍したものである。



また，0 でない 2 つの複素数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ について，これらの商を z_3 とすると

$$z_3 = \frac{z_1}{\alpha} = \frac{r_1}{r}\{\cos(\theta_1 - \theta) + i\sin(\theta_1 - \theta)\}$$

である。この点 z_3 は，点 z_1 を原点を中心に $-\theta$ だけ回転し，さらに原点からの距離を $\frac{1}{r}$ 倍した点である。



[MEMO]

3 (1) $z=6-2i$ とする。点 z を原点を中心に次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(i) $\dfrac{\pi}{6}$　　(ii) $-\dfrac{\pi}{4}$　　(iii) $\dfrac{\pi}{2}$

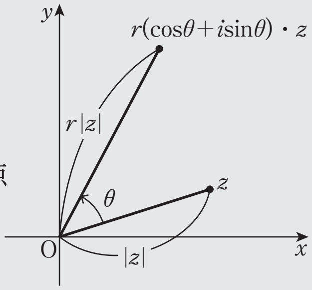
(2) 点 $(-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i)z$ は，点 z をどのように移動した点か。

Point Pickup

複素数の積と回転

点 $r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot z$ は，点 z を原点を中心に θ だけ回転し，原点からの距離を r 倍した点である。

とくに $r=1$ のときは，原点を中心に θ だけ回転した点である。



第 6 講 PART3 確認問題

1 $z=4+2i$ とする。点 z を原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す複素数は ア である。

ア は下の①～④のうちから選べ。

① $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$　② $\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i$

③ $\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,i$　④ $3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i$

2 $z=4+2i$ とする。点 z を原点を中心に $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数は イ である。

イ は下の①～④のうちから選べ。

① $(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$　② $(1+2\sqrt{3})+(-2+\sqrt{3})i$

③ $(2+\sqrt{3})+(1-2\sqrt{3})i$　④ $(2-\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})i$

3 $z=4+2i$ とする。点 z を原点を中心に $\dfrac{3}{2}\pi$ だけ回転した点を表す複素数は ウ である。

ウ は下の①～④のうちから選べ。

① $2-4i$　② $-2+4i$

③ $4-2i$　④ $-4-2i$

4 点 $(-3+\sqrt{3}\,i)z$ は，点 z を原点を中心に [エ] だけ回転し，原点からの距離を [オ] 倍した点である。

[エ]，[オ] は下の①～④のうちから選べ。

[[エ] の選択肢]

① $\dfrac{\pi}{6}$　　② $\dfrac{2}{3}\pi$

③ $\dfrac{5}{6}\pi$　　④ $\dfrac{7}{6}\pi$

[[オ] の選択肢]

① $\sqrt{3}$　　② 3

③ $2\sqrt{3}$　　④ $3\sqrt{3}$

[MEMO]

PART3 複素数の積の図形的な意味

3 (1) $z=6-2i$ とする。点 z を原点を中心に次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(i) $\dfrac{\pi}{6}$　(ii) $-\dfrac{\pi}{4}$　(iii) $\dfrac{\pi}{2}$

(2) 点 $(-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i)z$ は，点 z をどのように移動した点か。

[解答]

(1)(i) $\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)z=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)(6-2i)=(1+3\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})i$

(ii) $\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}z=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)(6-2i)$

$=(3\sqrt{2}-\sqrt{2})+(-3\sqrt{2}-\sqrt{2})i=2\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,i$

(iii) $\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)z=i(6-2i)=2+6i$

(2) $(-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i)z=2\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z=2\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}z$

よって，点 $(-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i)z$ は，点 z を原点を中心に $-\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転し，原点からの距離を $2\sqrt{2}$ 倍した点である。

第 6 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

点 z を原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す

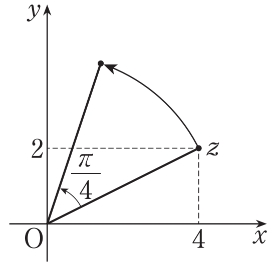
複素数は,

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)z \quad \text{[A]}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(4+2i)$$

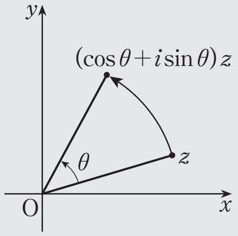
$$=(2\sqrt{2}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}+2\sqrt{2})i$$

$$=\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i$$



[A]　点 z を原点を中心に θ だけ回転した点を表す複素数は,

$(\cos\theta+i\sin\theta)z$



2　[正解] イ：③

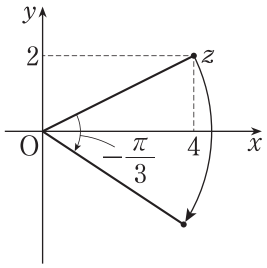
[解説]

点 z を原点を中心に $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数は,

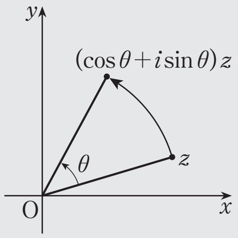
$$\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}z \quad \text{[B]}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4+2i)$$

$$=\mathbf{(2+\sqrt{3})+(1-2\sqrt{3})}\boldsymbol{i}$$



[B]　点 z を原点を中心に θ だけ回転した点を表す複素数は,
$(\cos\theta+i\sin\theta)z$



3　[正解] ウ：①

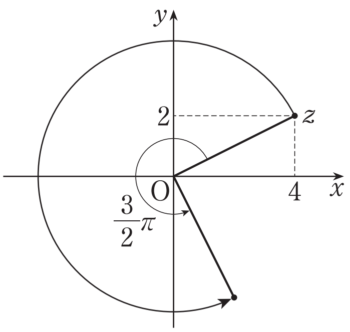
[解説]

点 z を原点を中心に $\frac{3}{2}\pi$ だけ回転した点を表す複素数は,

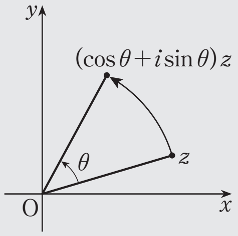
$$\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)z \quad \text{[C]}$$

$$=-i(4+2i)$$

$$=\mathbf{2-4}\boldsymbol{i}$$



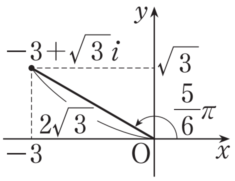
[C]　点 z を原点を中心に θ だけ回転した点を表す複素数は,
$(\cos\theta+i\sin\theta)z$



4　**[正解]** エ：③，オ：③

[解説]

$$-3+\sqrt{3}\,i$$
$$=2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$
$$=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$ [D]

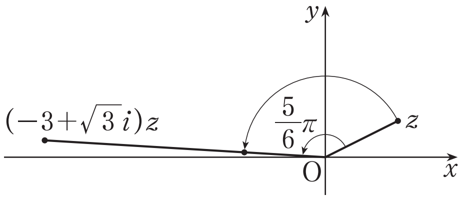
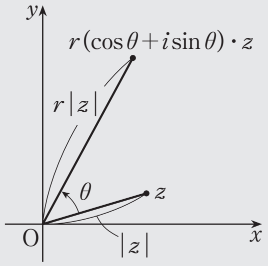


[D]　$-3+\sqrt{3}\,i$ を極形式に直す。

より，

$$(-3+\sqrt{3}\,i)z$$
$$=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)z$$

よって，点 $(-3+\sqrt{3}\,i)z$ は，点 z を原点を中心に $\frac{5}{6}\pi$ だけ回転し，原点からの距離を $2\sqrt{3}$ 倍した点である。[E]



[E]　点 $r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot z$ は，点 z を原点を中心に θ だけ回転し，原点からの距離を r 倍した点である。